

Шәкір Айдос 

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

10-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. Параболические уравнения

Цель лекции – изучение численных методов решения уравнений параболического типа. В рамках курса студенты освоят метод сеток (конечно-разностные схемы), научатся строить аппроксимации для начально-краевых задач, анализировать их точность, устойчивость и сходимость, а также применять полученные методы для численного решения задач математической физики и инженерии.

План лекции:

1. Метод сеток для уравнения параболического типа
2. Устойчивость конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности
3. Метод прогонки для уравнения теплопроводности
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

1 Метод сеток для уравнения параболического типа

В качестве примера уравнения параболического типа остановимся на уравнении теплопроводности для однородного стержня $0 \leq x \leq l$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

где $u = u(x, t)$ – температура и t – время. В дальнейшем для простоты будем полагать $a = 1$ (к такому случаю всегда можно прийти путем введения нового времени $\tau = a^2 t$).

Итак, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

Пусть, кроме того, в начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры

$$u(x, 0) = f(x),$$

и законы изменения температуры (режимы) на концах стержня $x = 0$ и $x = l$:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t).$$

Требуется найти распределение температуры $u = u(x, t)$ вдоль стержня в любой момент времени t .

Решим эту смешанную задачу методом сеток [6, 7].

Для этого рассмотрим пространственно-временную систему координат $\{x, t\}$ (рисунок 1).

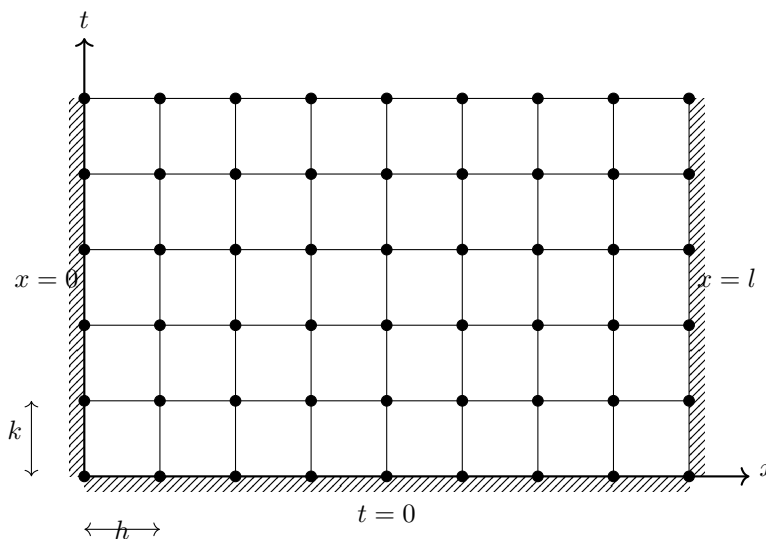


Рис. 1: Прямоугольная сетка в области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$

В полуплоскости $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ построим прямоугольную сетку:

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad t_j = jk \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$h = \frac{l}{n} \quad (n - \text{целое}), \quad k = \sigma h^2 \quad (\sigma - \text{постоянная})$$

— шаг вдоль оси Ox и шаг вдоль оси Ot соответственно.

Введем обозначения:

$$x_i = ih, \quad t_j = jk, \quad u_{ij} = u(x_i, t_j).$$

Заменяя уравнение (1.2) конечно-разностным уравнением, будем иметь:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\sigma h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (1.3)$$

Отсюда

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma u_{i+1,j}. \quad (1.4)$$

Из рассмотрения формулы (1.4) ясно, что, зная значения функции $u(x, t)$ в точках j -го слоя $t = t_j$ с помощью этой формулы можно вычислить значения $u(x, t)$ в точках следующего $(j+1)$ -го слоя $t = t_{j+1}$ (рисунок 2). При вычислении пользуются четырьмя соседними узлами — явная схема вида (схема 1).

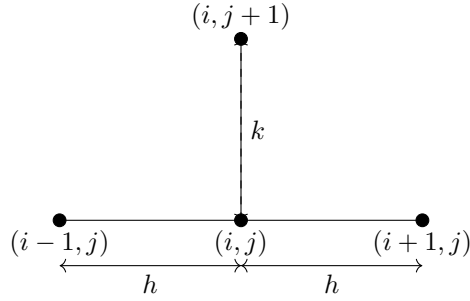


Рис. 2: Схема 1

Таким образом, исходя из начального слоя $t = 0$, значения $u(x, t)$ для которого определяются из начального условия

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

и используя значения функции $u(x, t)$ в крайних узлах $(0, t_j)$, (l, t_j) ($j = 0, 1, \dots$), определяемые граничными условиями

$$u(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad u(l, t_j) = \psi(t_j),$$

по формуле (1.4) последовательно вычисляем:

$$u(x_i, t_1), u(x_i, t_2), u(x_i, t_3), \dots \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

т.е. находим значения искомой функции $u(x, t)$ во всех узлах полуполосы. Остается разумно выбрать величину σ . При этом будем исходить из требования, чтобы ошибка при замене дифференциального уравнения (1.2) конечно-разностным уравнением (1.3) была наименьшей. Введем обозначения:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\sigma}(u_{i,j+1} - u_{ij}),$$

где $L_h(u)$ — конечно-разностный оператор, соответствующий дифференциальному оператору $L[u]$. Разность

$$R_h[u] = L_h[u] - L[u],$$

называемая ошибкой аппроксимации, есть та погрешность, которая получается при замене оператора $L[u]$ оператором $L_h[u]$. Вычислим эту погрешность в узлах (x_i, t_j) сетки для функции $u(x, t)$, являющейся решением уравнения (1.2). При этом $L[u] = 0$, и

$$R_h[u] = L_h[u]. \quad (1.5)$$

Учитывая, что

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j), \quad u_{i-1,j} = u(x_i - h, t_j), \quad u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + \sigma h^2),$$

Разлагая $L_h[u]$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_i, t_j) , ограничиваясь членами порядка h^6 , находим:

$$\begin{aligned} L_h[u] = & \frac{1}{h^2} \left\{ \left(u_{ij} + h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{ij}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} \right) - 2u_{ij} \right. \\ & \left. + \left(u_{ij} - h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{ij}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{\sigma} \left[\left(u_{ij} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} \sigma h^2 + \frac{(\sigma h^2)^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} + \frac{(\sigma h^2)^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3} \right) - u_{ij} \right] \\ & + O(h^6). \end{aligned}$$

Отсюда после приведения подобных членов будем иметь:

$$L_h[u] = \left(\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} \right) + h^2 \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} \right) + h^4 \left(\frac{1}{360} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} - \frac{\sigma^2}{6} \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3} \right) + O(h^6). \quad (1.6)$$

Так как $u(x, t)$ есть решение уравнения (1.2), то

$$\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} = \frac{\partial^3 u_{ij}}{\partial t^3}.$$

Заменяя в (1.6) частные производные по t равными им частными производными по x , получаем:

$$L_h[u] = h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^4} + h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O(h^6). \quad (1.7)$$

Выберем число σ так, чтобы первая скобка в (1.7) обратилась в нуль, т.е. положим $\sigma/2 = 1/12$, следовательно, $\sigma = 1/6$. При этом значении σ будем иметь:

$$L_h[u] = h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{216} \right) \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O(h^6) = -\frac{h^4}{540} \frac{\partial^6 u_{ij}}{\partial x^6} + O(h^6).$$

В силу (1.5) выполнено равенство $R_h[u] = L_h[u]$. Поэтому при таком выборе σ для погрешности получаем оценку

$$R_h[u] = O(h^4),$$

тогда как при другом выборе σ имеем $R_h[u] = O(h^2)$. В этом смысле значение $\sigma = 1/6$ является для расчетной схемы наилучшим.

Соответствующая расчетная формула (1.4) при таком выборе σ окончательно принимает вид:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}). \quad (1.8)$$

Отметим, что оценка ошибки аппроксимации $R_h[u]$ в общем случае для граничных узлов (x_i, t_j) не годится.

Пример. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Решение. Заметим, что начальные и краевые условия задачи симметричны относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. Поэтому и решение $u(x, t)$ будет симметрично относительно этой прямой. Для расчетов полагаем $h = \frac{1}{10}$ и, следовательно, $k = \frac{h^2}{6} = \frac{1}{600}$ и строим систему узлов (x_i, t_j) , где $x_i = 0.1i$, $t_j = \frac{j}{600}$. Результаты вычислений удобно расположить в прямоугольной таблице.

Таблица 1: Решение уравнения теплопроводности методом сеток

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.360	0.640	0.840	0.960	1.000	0.960	0.840	0.640	0.360	0
1	0	0.347	0.627	0.827	0.947	0.987	0.947	0.827	0.627	0.347	0
2	0	0.336	0.613	0.813	0.933	0.973	0.933	0.813	0.613	0.336	0
3	0	0.326	0.600	0.800	0.920	0.960	0.920	0.800	0.600	0.326	0
4	0	0.317	0.588	0.787	0.907	0.947	0.907	0.787	0.588	0.317	0
5	0	0.309	0.576	0.774	0.894	0.934	0.894	0.774	0.576	0.309	0
6	0	0.302	0.564	0.761	0.881	0.921	0.881	0.761	0.564	0.302	0

Начальная строка этой таблицы ($j = 0$) заполняется на основании заданных начальных условий:

$$u(x_i, 0) = 4x_i(1 - x_i) = 0.4i(1 - 0.1i), \quad (i = 0, 1, \dots, 10).$$

В первый ($i = 0$) и последний ($i = 10$) столбцы вписываются данные граничных условий:

$$u(0, t_j) = u(1, t_j) = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Остальные строки таблицы последовательно заполняются с помощью применения расчетной формулы. При этом, конечно, следует учитывать симметрию искомой функции u .

2 Устойчивость конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности

При использовании конечно-разностной схемы для решения краевой задачи возникает важный вопрос об устойчивости такой схемы. Под этим понимается следующее: конечно-разностная схема называется *устойчивой*, если малые погрешности, допущенные в процессе решения, затухают или во всяком случае остаются малыми при неограниченном увеличении номера текущего слоя (строгое определение понятия устойчивости см. в [8]). В противном случае схема называется *неустойчивой*. Ясно, что неустойчивая конечно-разностная схема противопоказана для вычислений, так как неизбежные незначительные ошибки, например погрешности округлений, могут создать большие отклонения от точного решения краевой задачи и привести к результатам, не имеющим ничего общего с действительностью.

Выясним условия устойчивости приведённой выше конечно-разностной схемы (раздел 1, (1.4)) для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

с заданными граничными и начальными условиями (смешанная краевая задача):

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = \varphi(t), \\ u(l, t) = \psi(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

Пусть $\Delta x_i = h$ и $\Delta t_j = k$, где $h = \frac{l}{n}$, $k = \sigma h^2$. Переходя к конечным разностям в уравнении (2.1) (раздел 1), будем иметь

$$\sigma u(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)u(x_i, t_j) + \sigma u(x_i - h, t_j) - u(x_i, t_j + k) = 0. \tag{2.3}$$

В граничных узлах сетки $x_i, t_j \in \Gamma$ выполнены следующие условия:

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad u(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad u(l, t_j) = \psi(t_j). \quad (2.4)$$

Предположим, что в точках начального слоя $t = 0$ допущена ошибка $\varepsilon_{i,0}$, т.е.

$$u(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i,0},$$

и пусть $v(x_i, t_j)$ — решение уравнения

$$\sigma v(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)v(x_i, t_j) + \sigma v(x_i - h, t_j) - v(x_i, t_j + k) = 0, \quad (2.5)$$

удовлетворяющее граничным условиям, содержащим ошибку:

$$v(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i,0}, \quad v(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad v(l, t_j) = \psi(t_j). \quad (2.6)$$

Нас интересует, как изменяется погрешность

$$w(x_i, t_j) = v(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)$$

при неограниченном возрастании номера j . Вычитая из уравнения (2.5) уравнение (2.3), для погрешности $w(x_i, t_j)$ получим конечно-разностное уравнение:

$$\sigma w(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)w(x_i, t_j) + \sigma w(x_i - h, t_j) - w(x_i, t_j + k) = 0. \quad (2.7)$$

На границе Γ области имеем

$$\begin{cases} w(x_i, 0) = v(x_i, 0) - u(x_i, 0) = \varepsilon_{i,0}, \\ w(0, t_j) = v(0, t_j) - u(0, t_j) = 0, \\ w(l, t_j) = v(l, t_j) - u(l, t_j) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Частное решение уравнения (2.7) будем искать в виде

$$w(x_i, t_j) = \lambda^{t_j} \sin px_i, \quad (2.9)$$

где числа λ и p ($p > 0$) подберём так, чтобы выражение (2.9) удовлетворяло уравнению (2.7) и однородным краевым условиям

$$w(0, t_j) = 0, \quad w(l, t_j) = 0. \quad (2.10)$$

На основании этих условий имеем

$$\lambda^{t_j} \sin p \cdot 0 = 0, \quad \lambda^{t_j} \sin pl = 0,$$

откуда вытекает, что

$$pl = m\pi, \quad p = \frac{m\pi}{l}, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$w(x_i, t_j) = \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi x_i}{l}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7), будем иметь

$$\sigma \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi}{l}(x_i + h) + (1 - 2\sigma) \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi}{l} x_i + \sigma \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi}{l}(x_i - h) - \lambda^{t_j+k} \sin \frac{m\pi}{l} x_i = 0,$$

или

$$\sigma \left[\sin \frac{m\pi}{l}(x_i + h) - 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i + \sin \frac{m\pi}{l}(x_i - h) \right] + (1 - \lambda^k) \sin \frac{m\pi}{l} x_i = 0. \quad (2.11)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках равенства (2.11), приведём к виду, удобному для логарифмирования. Имеем

$$\begin{aligned} \sin \frac{m\pi}{l}(x_i + h) - 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i + \sin \frac{m\pi}{l}(x_i - h) &= 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \cos \frac{m\pi}{l} h - 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \\ &= 2 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \left(\cos \frac{m\pi}{l} h - 1 \right) = -4 \sin \frac{m\pi}{l} x_i \sin^2 \frac{m\pi}{2l} h. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в равенство (2.11) и сокращая обе части на общий множитель $\sin \frac{m\pi}{l} x_i$, получим

$$-4\sigma \sin^2 \frac{m\pi}{2l} h + (1 - \lambda^k) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda^k = 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}$$

и

$$\lambda = \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (2.12)$$

Заметим, что λ не зависит от точки (x_i, t_j) . Таким образом, для однородного уравнения (2.7) получаем линейно независимые решения вида

$$w_m(x_i, t_j) = \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{t_j}{k}} \sin \frac{m\pi x_i}{l}, \quad (m = 1, 2, \dots, n-1),$$

причем каждое решение удовлетворяет однородным краевым условиям (2.10). Линейная комбинация этих решений

$$w(x_i, t_j) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m w_m(x_i, t_j)$$

или

$$w(x_i, t_j) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{t_j}{k}} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \quad (2.13)$$

также является решением уравнения (2.7), удовлетворяющим при любых значениях коэффициентов c_m условиям (2.10). Эти коэффициенты подбираются так, чтобы выполнялось первое условие (2.8), т. е. чтобы

$$w(x_i, 0) = \varepsilon_{i,0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Для устойчивости рассматриваемой конечно-разностной схемы (2.3) необходимо, чтобы при любых значениях постоянных c_1, c_2, \dots, c_{n-1} функция $w(x_i, t_j)$, определяемая равенством (2.13), оставалась ограниченной при $t_j \rightarrow \infty$. Для этого достаточно, чтобы для всех m было выполнено неравенство

$$\left| 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right| \leq 1.$$

Отсюда

$$-1 \leq 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \leq 1$$

и

$$0 \leq \sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \leq \frac{1}{2}, \quad (m = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.14)$$

Неравенство (2.14) заведомо будет выполнено, если величина σ удовлетворяет условию

$$0 < \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

Полученные неравенства дают достаточные условия устойчивости рассмотренной ранее конечно-разностной схемы (2.3) для решения смешанной задачи в случае уравнения теплопроводности. Заметим, что выбранное в разделе 1 значение $\sigma = 1/6$ удовлетворяет неравенству (2.15).

Замечание. Взяв $\sigma = 1/2$, мы получаем очень удобное конечно-разностное уравнение

$$2u_{i,f+1} = u_{i-1,f} + u_{i+1,f}, \quad (2.16)$$

Схема устойчива, однако в этом случае порядок отклонения уравнения (2.16) от уравнения теплопроводности равен $O(h^2)$, в то время как при $\sigma = 1/6$ этот порядок равен $O(h^4)$.

3 Метод прогонки для уравнения теплопроводности

В предыдущих параграфах мы видели, что для устойчивости конечно-разностной схемы для уравнения теплопроводности шаги $h = \Delta x_i$ и $k = \Delta t_j$ должны быть неодинаковы, причем выбор шага h для пространственной координаты x накладывает определенные ограничения на величину шага k для временной координаты t . Важность этого обстоятельства была отмечена Курантом, Фридрихсом и Леви.

Так как при устойчивой схеме шаг k имеет порядок $O(h^2)$, причем отношение $\sigma = \frac{k}{h^2}$ ограничено сверху, то при малом h продвижение решения $u(x, t)$ по t весьма незначительно и объем работы чрезвычайно велик. Например, приняв $h = 0,1$ и полагая $k = \sigma h^2 = 1/600$, получим, что для описания процесса распространения тепла за единичный промежуток времени $0 \leq t \leq 1$ требуется таблица, содержащая 600 строк! Мы сейчас укажем другую устойчивую вычислительную схему, для которой отношение k/h^2 не является ограниченным сверху и поэтому шаг $k = \Delta t_j$ временной координаты может быть выбран сравнительно крупным.

Рассмотрим по-прежнему в области $G := \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty\}$ приведенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t), \quad u(x, 0) = f(x). \quad (3.2)$$

Построим в области G прямоугольную сетку

$$x_i = ih, \quad t_j = jk \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots),$$

где $h = l/n$ (n — целое) и k — некоторая положительная величина. Пусть $u_{ij} = u(x_i, t_j)$. Используя приближенную симметричную формулу для второй производной по x и применяя формулу численного дифференцирования по t («назад», для $(j+1)$ -го слоя сетки), вместо дифференциального уравнения (3.1) будем иметь следующее конечно-разностное уравнение [10]:

$$\frac{u_{i-1, j+1} - 2u_{i, j+1} + u_{i+1, j+1}}{h^2} = \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{k}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, \dots),$$

или

$$u_{i-1, j+1} - (2+s)u_{i, j+1} + u_{i+1, j+1} = -su_{i, j}, \quad (3.3)$$

где $s = h^2/k$. Таким образом, здесь используется схема II вида (неявная схема) (рисунок 3).

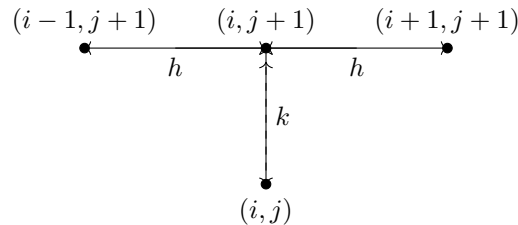


Рисунок 3. Схема II (неявная)

Из граничных условий (3.2) получаем

$$u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \quad u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}). \quad (3.4)$$

Систему (3.3)–(3.4) будем решать методом прогонки. Пусть

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1}(b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \quad (3.5)$$

и, следовательно,

$$u_{i-1,j+1} = a_{i-1,j+1}(b_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}). \quad (3.6)$$

Подставляя выражение (3.6) в формулу (3.3), будем иметь

$$a_{i-1,j+1}(b_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}) - (2 + s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{ij},$$

отсюда

$$u_{i,j+1} = \frac{a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij} + u_{i+1,j+1}}{2 + s - a_{i-1,j+1}}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.5), получим

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2 + s - a_{i-1,j+1}}, \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + su_{ij}, \quad (3.7)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n).$$

При $i = 1$ из формул (3.3) и (3.5) имеем

$$u_{0,j+1} - (2 + s)u_{1,j+1} + u_{2,j+1} = -su_{1j}$$

и

$$u_{1,j+1} = a_{1,j+1}(b_{1,j+1} + u_{2,j+1}). \quad (3.8)$$

Отсюда, используя граничные условия, получаем

$$u_{1,j+1} = \frac{\varphi(t_{j+1}) + su_{1j} + u_{2,j+1}}{2 + s}. \quad (3.9)$$

Так как формулы (3.8) и (3.9) должны быть тождественны, то, сравнивая их, выводим:

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2 + s}, \quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + su_{1j}. \quad (3.10)$$

Пользуясь формулами (3.7) и (3.10), производя «прогонку» в прямом направлении (*прямой ход*), определяем две последовательности чисел: $a_{1,j+1}, a_{2,j+1}, \dots, a_{n-1,j+1}$ и $b_{1,j+1}, b_{2,j+1}, \dots, b_{n-1,j+1}$. Отсюда,

применяя формулы (3.4) и (3.5), с помощью «обратного хода» находим значения искомой функции:

$$\begin{aligned}
u_{n,j+1} &= \psi(t_{j+1}), \\
u_{n-1,j+1} &= (u_{n,j+1} + b_{n-1,j+1})a_{n-1,j+1}, \\
u_{n-2,j+1} &= (u_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1})a_{n-2,j+1}, \\
&\vdots \\
u_{1,j+1} &= (u_{2,j+1} + b_{1,j+1})a_{1,j+1}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Таким образом, указан способ перехода от j -го слоя к $(j+1)$ -му слою. Следовательно, отправляясь от известного начального (нулевого) слоя, можно шаг за шагом построить искомое решение $u(x, t)$ во всех точках сетки (x_i, t_j) . Выясним устойчивость при $j \rightarrow +\infty$ конечно-разностной схемы (3.3). Пусть $w_{ij} = v(x_i, t_j)$ — решение уравнения (3.3), удовлетворяющее «возмущенным» условиям

$$v(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i0}, \quad v(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad v(l, t_j) = \psi(t_j),$$

где ε_{i0} — начальные ошибки. Погрешность

$$w_{ij} = v(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)$$

удовлетворяет уравнению

$$w_{i-1,j+1} - (2+s)w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1} + sw_{ij} = 0 \tag{3.12}$$

и граничным условиям

$$w_{i0} = \varepsilon_{i0}, \quad w_{0j} = w_{nj} = 0. \tag{3.13}$$

Положим

$$w_i^{(m)} = \lambda_t \sin \frac{m\pi x_i}{l}. \tag{3.14}$$

При целом m ($m = 1, 2, 3, \dots, n-1$) функция $w^{(m)}$ удовлетворяет вторым условиям (3.13). Подставляя выражение (3.14) в уравнение (3.12), получим

$$\lambda^{k+1} \sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - (2+s)\lambda^k \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \lambda^k \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} + s\lambda^k \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 0$$

или

$$\lambda^k \left[\sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} \right] - s(\lambda^k - 1) \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 0. \tag{3.15}$$

Так как

$$\sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} = -4 \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin^2 \frac{m\pi h}{2l},$$

то, производя сокращение в формуле (3.15) на $\sin \frac{m\pi x_i}{l}$, будем иметь

$$4\lambda^k \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} + s(\lambda^k - 1) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda^k = -\frac{s}{s + 4 \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}} \leq 1, \quad (3.16)$$

если только $s > 0$, и, следовательно,

$$|\lambda| \leq 1. \quad (3.17)$$

Таким образом, все решения $\omega_{ij}^{(m)}$ асимптотически стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$ или, в крайнем случае, когда $\sin \frac{m\pi h}{2l} = 0$, ограничены и при фиксированном x_i не возрастают по модулю. Так как решение ω_{ij} представляет собой линейную комбинацию функций $\omega_{ij}^{(m)}$, то из неравенства (3.17) следует, что схема (3.3) устойчива при любом $s > 0$. Что касается ошибки аппроксимации для схемы (3.3), то эта ошибка, вообще говоря, есть $O(h^2 + k)$ (раздел 1).

Пример. Рассмотрим разобранный выше (раздел 1) смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Примем $h = 0,1$; $k = 0,01$; следовательно,

$$s = \frac{h^2}{k} = 1.$$

Полагая

$$u_{i,j+1} = a_{i,j+1}(b_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}),$$

в силу формул (3.10) и (3.7) будем иметь:

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{3}, \quad b_{1,j+1} = u_{1j}$$

и

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{3 - a_{i-1,j+1}}, \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + u_{ij} \quad (i > 1).$$

В частности, при $j = 0$ получаем формулы для первого слоя:

$$a_{1,1} = \frac{1}{3}, \quad b_{1,1} = u_{10}, \quad (3.18)$$

$$a_{i,1} = \frac{1}{3 - a_{i-1,1}}, \quad b_{i,1} = a_{i-1,1}b_{i-1,1} + u_{i0} \quad (i > 1). \quad (3.19)$$

Кроме того, на основании формул (3.11) имеем:

$$\begin{cases} u_{n1} = 0, \\ u_{n-1,1} = (u_{n1} + b_{n-1,1})a_{n-1,1}, \\ u_{n-2,1} = (u_{n-1,1} + b_{n-2,1})a_{n-2,1}, \\ \vdots \\ u_{11} = (u_{2,1} + b_{1,1})a_{1,1}. \end{cases} \quad (3.20)$$

По формулам (3.18), (3.19) и (3.20) можно вычислить значения u_{ij} искомой функции для первого слоя ($j = 1$). Полученные результаты приведены в таблице 3.

Таблица 2: Решение уравнения теплопроводности методом прогонки

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_{i0}	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1,00	0,96	0,84	0,64	0,36	0
a_{i1}	0	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0
b_{i1}	0	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813	0
u_{i1}	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310	0
u_{i1}	0	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302	0

В последней строке таблицы 3 для сравнения приведены значения u_i^* , искомой функции, полученные обычным методом сеток при $h = \Delta x = 1/10$ и $k = \Delta t = 1/600$ (раздел 1, таблица 1). Обращает на себя внимание значительное расхождение значений u_{i1} и u_{i1}^* вблизи границы области ($i = 1$ и $i = 9$). Это объясняется тем, что для таких точек примененные формулы численного дифференцирования обладают пониженной точностью. Для устранения этого неблагоприятного обстоятельства рекомендуется для точек, близких к границе области, использовать более точные формулы численного дифференцирования.

4 Контрольные вопросы

1. В чём заключается идея метода сеток для уравнений параболического типа?

2. Как строится конечно-разностная аппроксимация производных в параболических уравнениях?
3. Какие бывают основные типы разностных схем (явные и неявные) и в чём их различие?
4. Что понимается под аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью разностной схемы?
5. Какие условия устойчивости накладываются на явные схемы для параболических уравнений?
6. Как формулируются начальные и граничные условия в методе сеток?
7. Какие методы используются для анализа и оценки погрешности разностных схем?

5 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–24].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1964, гл. I, IV.
- [2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 4, «Наука», 1966, лекции I–IV.
- [3] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, Физматгиз, 1961, гл. I и III.
- [4] Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, изд. 4, ОНТИ, 1936, гл. I.
- [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 18, т. II, Физматгиз, 1962, гл. VIII.
- [6] Колгатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [7] Милин В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955, гл. VIII.
- [8] Рябенкий В. С. и Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956, гл. I, II.
- [9] Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, «Наука», 1966.

- [10] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.
- [11] Современная математика для инженеров, под ред. Беккенбаха Э. Ф., гл. II, Браун Дж. В., Методы Монте-Карло, ИЛ, 1958.
- [12] Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, Гостехиздат, 1951, гл. XVII.
- [13] Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956, гл. VIII.
- [14] Мороз Ф. М. и Кимбелл Дж. Е., Методы исследования операций. Приложения, «Советское радио», 1956.
- [15] Математика в СССР за сорок лет, т. I, Физматгиз, 1959, Гаврунин М. К., Канаторович Л. В., Приближенные и численные методы.
- [16] Положий Г. Н. и др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. VII.
- [17] Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1940.
- [18] Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.
- [19] Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2, Физматгиз, 1961, гл. VIII.
- [20] Гурса Э. Ж., Курс математического анализа, т. 3, ГТТИ, 1933, гл. XXVII.
- [21] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. XI.
- [22] Березкин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, изд. 3, «Наука», 1966, т. II, гл. X.
- [23] Слободянский М. Г., Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругого статика, Прикл. матем. и мех. 3, вып. 1 (1939).
- [24] Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.